OVERSIGT OVER DET KGL. DANSKE VIDENSKABERNES SELSKABS
FORHANDLINGER. 1913. N° 1

NOTE SUR LA FONCTION ZÉTA DE RIEMANN $\zeta(s) = \zeta(\sigma + it)$ SUR LA DROITE $\sigma = 1$

PAR

HARALD BOHR.

On sait que la fonction zéta de Riemann $\zeta(s) = \zeta(\sigma + it)$ est une fonction méromorphe et uniforme dans tout le plan complexe, et n'ayant pas d'autres pôles que le point 1. De la représentation suivante:

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

valable dans le demi-plan $\sigma > 1$ et où p parcourt les nombres premiers 2, 3, 5, 7, ..., il résulte immédiatement, que $\zeta(s) \neq 0$ pour $\sigma > 1$. Une conclusion plus générale, qu'on peut tirer de cette représentation c'est que, pour $\sigma > 1 + \delta (\delta > 0)$,

$$|\zeta(s)| > \prod_p \frac{1}{1 + p^{-(1+\delta)}} = k > 0;$$

ce que revient à dire qu'à tout $\delta > 0$ correspond un nombre $k = k(\delta) > 0$ tel que, pour $\sigma > 1 + \delta$

$$|\zeta(s)| > k.$$

D'autre part, on a le théorème suivant:

Théorème I[1]. La fonction $\zeta(s)$ prend dans le demi-plan $\sigma > 1$ (et, d'après l'observation que nous venons de faire,

[1] Harald Bohr, Sur l'existence de valeurs arbitrairement petites de la fonction $\zeta(s) = \zeta(\sigma + it)$ de Riemann pour $\sigma > 1$. [Bulletin de l'Académie Royale des Sciences et des Lettres de Danemark, 1911].

elle prendra également dans toute bande $1 < \sigma < 1 + \delta (\delta > 0))$ des valeurs arbitrairement petites en valeur absolue, en d'autres termes: à tout $\varepsilon > 0$ correspond un nombre $s_0 = \sigma_0 + i t_0$ tel que

$$\sigma_0 > 1 \ , \quad |\zeta(s_0)| < \varepsilon.$$

De ce théorème relatif à la fonction zéta dans le demi-plan $\sigma > 1$, j'ai déduit dans la Note citée, que sur la droite $\sigma = 1$ elle même $\zeta(s)$ prendra également des valeurs arbitrairement petites en valeur absolue. En faisant cette déduction je me suis appuyé sur le théorème important suivant de M.M. PHRAGMÉN et LINDELÖF[1]:

Soit $F(s)$ une fonction analytique jouissant des propriétés suivantes:

1° $F(s)$ est régulière dans le domaine $\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$, $t \geq t_0$, où σ_1, σ_2 et t_0 désignent des nombres fixes tels que $\sigma_2 > \sigma_1$ et que $t_0 > 0$.

2° Sur la frontière de ce domaine (c.-à-d. sur le segment fini $\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$, $t = t_0$, et sur les deux segments infinis $\sigma = \sigma_1$, $t \geq t_0$, et $\sigma = \sigma_2$, $t \geq t_0$)

$$|F(s)| < C,$$

où C désigne une constante positive.

3° Il existe deux constantes K_1 et K_2 telles que pour tout $\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$, $t \geq t_0$,

$$|F(s)| < K_1 + t^{K_2}.$$

En ces conditions on aura, dans tout le domaine $\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$, $t \geq t_0$,

$$|F(s)| \leq C.$$

Comme dans la suite je vais me servir d'un raisonnement analogue à celui employé par M.M. PHRAGMÉN et LINDELÖF pour

[1] PHRAGMÉN et LINDELÖF, Sur une extension d'un principe classique de l'Analyse... [Acta Matematica, t. XXXI, 1908].

la démonstration de ce théorème, je me permettrai de reproduire ici la démonstration élégante de ces auteurs.

Soit ε une quantité positive quelconque, la fonction

$$G(s) = e^{i\varepsilon s} \cdot F(s)$$

sera, d'abord, régulière pour $\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$, $t \geqq t_0$ et dans le même domaine on aura, puisque $t_0 > 0$

$$|G(s)| = e^{-\varepsilon t} \cdot |F(s)| \leqq |F(s)|^1.$$

En outre il est évident que nous aurons, uniformément pour tous les $\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$,

$$\lim_{t=\infty} |G(s)| = \lim_{t=\infty} e^{-\varepsilon t} \cdot |F(s)| = 0.$$

En désignant par $s' = \sigma' + it'$ un point arbitraire du domaine $\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$, $t \geqq t_0$, il existe donc un nombre t_1 tel que $t_1 > t'$ et que $|G(s)| < C$ sur tout le segment $\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$, $t = t_1$. Par suite s' sera situé dans un rectangle $[\sigma_1 + it_0, \sigma_2 + it_0, \sigma_2 + it_1, \sigma_1 + it_1]$ sur le perimètre duquel $|G(s)| < C$.

Or, comme la valeur absolue d'une fonction analytique, régulière dans un domaine donné (y compris la frontière) atteint son maximum sur la frontière, on a, pour chaque point du rectangle, $|G(s)| < C$, et, par suite, en particulier,

$$|G(s')| < C$$

c.-à-d.

$$|F(s')| < Ce^{\varepsilon t'}.$$

s' étant fixe, cela est vrai pour tout $\varepsilon > 0$. Donc,

$$|F(s')| \leqq C.$$

Et, comme s' est un point arbitraire du domaine $\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$, $t \geqq t_0$, le théorème de M.M. Phragmén-Lindelöf se trouve démontré.

A l'aide de ce théorème et du théorème I on peut immédiatement, je l'ai dit plus haut, déduire le théorème suivant:

[1] Dans cette dernière inégalité, le signe d'égalité ne se rapporte qu'aux zéros éventuels de $F(s)$.

Théorème II. La fonction $\zeta(s)$ prend sur la droite $\sigma = 1$ (où elle est différente de zéro, comme on le sait) des valeurs arbitrairement petites en valeur absolue.

Démonstration. Supposons, que le théorème soit faux, la fonction $F(s) = \frac{1}{\zeta(s)}$ serait régulière et bornée (c.-à-d. moindre, en valeur absolue, qu'une constante) sur toute la frontière du domaine $1 \leq \sigma \leq 2$, $t \geq 1$. On sait en outre qu'il existe deux constantes K_1 et K_2 telles que, dans le domaine $1 \leq \sigma \leq 2$, $t \geq 1$, on a

$$\left| F(s) \right| = \left| \frac{1}{\zeta(s)} \right| < K_1 + t^{K_2}.$$

Il s'ensuivrait, en vertu du théorème de M.M. PHRAGMÉN-LINDELÖF, que $F(s) = \frac{1}{\zeta(s)}$ fût bornée dans le domaine $1 \leq \sigma \leq 2$, $t \geq 1$, et, par suite, dans tout le demi-plan $\sigma > 1$, ce qui serait contraire au théorème I.

A l'aide de recherches ultérieures[1] j'ai démontré, relativement à la valeur de la fonction zéta dans le demi-plan $\sigma > 1$, le théorème suivant:

Théorème III. Dans le demi-plan $\sigma > 1$, et, plus généralement, dans le domaine $1 < \sigma < 1 + \delta$, $t > 1$, la fonction $\zeta(s)$ prend toutes les valeurs différentes de zéro.

Dans ce théorème se trouve contenu comme cas particulier, non seulement le théorème précédent énonçant, que, dans le domaine $1 < \sigma < 1 + \delta$, $t > 1$, $\zeta(s)$ prend des valeurs moindres que ε en valeur absolue, mais plus généralement un théorème disant qu'à l'intérieur du domaine considéré, $\zeta(s)$ prend toutes les valeurs z pour lesquelles $0 < |z| < \varepsilon$. Il se pose maintenant la question, s'il est possible, en partant de cette proposition plus générale sur les valeurs infiniment petites de la fonction zéta dans le demi-plan $\sigma > 1$, de tirer des conclusions ultérieures relatives aux valeurs infiniment

[1] Voir le mémoire de l'auteur intitulé Über das Verhalten von $\zeta(s)$ in der Halbebene $\sigma > 1$ [Göttinger Nachrichten, 1911].

petites, que prend la fonction $\zeta(s)$ sur la droite $\sigma = 1$ elle-même. Dans la présente étude je me propose de faire voir, qu'il en est ainsi en démontrant le théorème suivant:

Théorème IV. Soit, dans le plan complexe de la variable $\zeta = re^{i\theta}$, un rayon vecteur quelconque $\theta = \Theta$, $0 < r < \infty$; la fonction $\zeta(s)$ prendra sur la droite $\sigma = 1$ une infinité de valeurs situées, dans le plan ζ, sur la demi-droite $\theta = \Theta$; parmi ces valeurs il y en a de module r aussi petit qu'on veut. Autrement dit: Étant donné un nombre réel quelconque Θ, il existera une suite de nombres positifs, $r_1 > r_2 > r_3 \ldots > r_n > \ldots$ ($\lim\limits_{n=\infty} r_n = 0$), et une suite correspondante de nombres réels $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n, \ldots$, telles que pour tous les $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\zeta(1 + it_n) = r_n \cdot e^{i\Theta}.$$

Avant de procéder à la démonstration de ce théorème, il sera utile de démontrer le théorème auxiliaire suivant, qui doit être considéré comme une généralisation du théorème de M.M. Phragmén-Lindelöf, adaptée à notre but.

Théorème auxiliaire. Soit $F(s)$ une fonction analytique jouissant des proprietés suivantes:

1° $F(s)$ est régulière dans le domaine $\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$, $t \geqq t_0$, où σ_1, σ_2 et t_0 sont des nombres fixes tels que $\sigma_2 > \sigma_1$ et que $t_0 > 0$.

2° Il existe un nombre réel Θ_1 et une constante positive C tels que sur le segment infini $\sigma = \sigma_1$, $t \geqq t_0$, la fonction $F(s)$ ne prenne pas de valeur $re^{i\Theta_1}$, où $r > C$ (en d'autres termes: la fonction ne prendra sur le segment considéré aucune valeur, qui se trouve située, dans le plan ζ, sur le prolongement du segment $[0, Ce^{i\Theta_1}]$ au delà du point $Ce^{i\Theta_1}$), tandis que sur le reste de la frontière (c.-à-d. pour $\sigma = \sigma_2$, $t \geqq t_0$, et pour $\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$, $t = t_0$) l'inégalité suivante ait lieu:

$$|F(s)| \leqq C.$$

3° Pour tous les $\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$, $t \geqq t_0$,

$$|F(s)| < K_1 + t^{K_2}.$$

Étant données ces propriétés, la fonction $F(s)$ ne prendra dans tout le domaine $\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2, t \geqq t_0$, aucune valeur $re^{i\theta_1}$, pour laquelle $r > C$.

Démonstration. Evidemment, sans restreindre la généralité, nous pouvons supposer $\theta_1 = 0$, sinon nous n'aurions qu'à considérer, au lieu de la fonction $F(s)$, la fonction $F(s)e^{-\theta_1 i}$. Désignons par ε une quantité positive arbitraire et considérons la fonction

$$G(s) = e^{i\varepsilon(s-\sigma_1)} \cdot F(s).$$

On a, pour $\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$, $t \geqq t_0$,

$$|G(s)| = e^{-\varepsilon t} \cdot |F(s)| \leqq |F(s)|.$$

On a donc, en particulier, sur les segments $\sigma = \sigma_2$, $t \geqq t_0$, et $\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$, $t = t_0$,

$$|G(s)| < C.$$

En outre, on a sur le segment $\sigma = \sigma_1$, $t \geqq t_0$

$$G(s) = e^{i\varepsilon(s-\sigma_1)} \cdot F(s) = e^{-\varepsilon t} F(s),$$

d'où l'on conclut immédiatement que sur ce segment $\sigma = \sigma_1$, $t \geqq t_0$, la fonction $G(s)$ ne prend pas de valeur réelle $> C$. D'autre part, comme nous avons, uniformément pour $\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$,

$$\lim_{t=\infty} G(s) = 0,$$

nous pouvons trouver, pour un point arbitraire $s' = \sigma' + it'$ du domaine $\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$, $t \geqq t_0$, un nombre correspondant $t_1 > t'$ tel que sur tout le segment $\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$, $t = t_1$,

$$|G(s)| < C.$$

Par suite, la fonction $G(s)$ ne prend sur tout le périmètre du rectangle $[\sigma_1 + it_0, \sigma_2 + it_0, \sigma_2 + it_1, \sigma_1 + it_1]$ aucune valeur réelle $> C$: nous savons, qu'il en est ainsi pour l'un des côtés du rectangle et que, sur les trois autres, $|G(s)| < C$. Il s'ensuit immédiatement que dans tout le rectangle en question, et en particulier au point $s' = \sigma' + it'$, la fonction $G(s)$ ne prend pas de valeur réelle $> C$.[1] Nous avons donc démontré que, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout point s' du domaine $\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$, $t \geqq t_0$, la fonction $G(s) = e^{i\varepsilon(s-\sigma_1)} \cdot F(s)$ ne prend pas une valeur positive $> C$. Il ensuit sans peine que la fonction $F(s)$ elle même ne prend, dans le domaine considéré, aucune valeur réelle $> C$. Supposons, en effet, qu'il en soit autrement et que par conséquent il existe un point $s' = \sigma' + it'$ $(\sigma_1 < \sigma' < \sigma_2,\ t' > t_0)$ pour lequelle

$$F(s') = r' > C;$$

déterminons alors un nombre $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(r') > 0$, tel que

$$\frac{C + r'}{2} \cdot e^{-\varepsilon_1 (t'+1)} > C.$$

Comme la fonction analytique $F(s)$, régulière en s', prend, dans le voisinage du point s' toutes les valeurs voisines du point $F(s') = r'$, nous sommes évidemment en mesure de déterminer, à l'intérieur du domaine $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$, $t > t_0$, un point $s'' = \sigma'' + it''$ tel que, si nous posons $F(s'') = r'' e^{i\theta''}$, les inégalités suivantes aient lieu:

$$\sigma'' - \sigma_1 > \frac{\sigma' - \sigma_1}{2},\ t'' < t' + 1,\ r'' > \frac{C + r'}{2},\ 0 > \theta'' > -\varepsilon_1 \frac{\sigma' - \sigma_1}{2}.$$

En posant ensuite $\varepsilon = -\dfrac{\theta''}{\sigma'' - \sigma_1}$, nous aurons:

$$0 < \varepsilon < \frac{\varepsilon_1 \dfrac{\sigma' - \sigma_1}{2}}{\sigma'' - \sigma_1} < \varepsilon_1.$$

[1] Je fais ici usage de la remarque suivante: Soit la fonction $G(s)$ régulière à l'intérieur et sur la frontière d'un domaine limité par une courbe fermée (dans le cas, qui nous occupe, le domaine considéré serait un rectangle). Si la fonction prend des valeurs réelles positives dans ce domaine, elle prendra sa plus grande valeur positive en un point frontière du domaine. L'exactitude de cette remarque ressort immédiatement de ce fait, que, dans le voisinage d'un point intérieur quelconque s_0, la fonction $G(s)$ prend toutes les valeurs voisines du point $G(s_0)$.

ε étant choisi de cette manière, le nombre

$$G(s'') = e^{i\varepsilon(s''-\sigma_1)} F(s'') = e^{-\varepsilon t''} \cdot e^{i\varepsilon(\sigma''-\sigma_1)} r'' e^{i\theta''}$$
$$= r'' e^{-\varepsilon t''} \cdot e^{i(\theta''+\varepsilon(\sigma''-\sigma_1))} = r'' e^{-\varepsilon t''}$$

sera réel, et, en vertu des inégalités ci-dessus, on aura

$$G(s'') = r'' e^{-\varepsilon t''} > \frac{C+r'}{2} e^{-\varepsilon_1(t'+1)} > C,$$

qui serait en contradiction avec le résultat ci-dessus, valable pour tous les $\varepsilon > 0$ et pour tous les s intérieures au domaine considéré, résultat d'après lequel $G(s)$ ne prendrait pas de valeur réelle $> C$. Voilà le théorème démontré.

A l'aide de ce théorème auxiliaire nous pouvons, en peu de mots, démontrer le théorème IV.

En supposant, que ce dernier théorème soit faux, il existerait un nombre réel $\Theta_1 = -\Theta$ et une constante correspondante $c > 0$, de sorte que la fonction $\frac{1}{\zeta(s)}$ sur la droite $\sigma = 1$ ne prendrait aucune valeur $re^{i\Theta_1}$, pour laquelle $r > c$. En posant $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 2$, $t_0 = 1$ et $F(s) = \frac{1}{\zeta(s)}$ et en choisissant une constante C convenable, les conditions du théorème auxiliaire se trouveraient donc remplies. Il en résulte que, dans le domaine $1 \leqq \sigma \leqq 2$, $t \geqq 1$, la fonction $F(s) = \frac{1}{\zeta(s)}$ ne prendrait pas de valeur $re^{i\Theta_1}$ pour laquelle $r > C$, ce qui serait incompatible avec le fait, que dans le domaine considéré $\zeta(s)$ prend toutes les valeurs différentes de zéro. Voilà le théorème IV démontré.

De la même manière exactement se démontre le théorème suivant V; on n'a qu'à remplacer $\frac{1}{\zeta(s)}$ par $\zeta(s)$.

Théorème V. $\zeta(s)$ prend sur la droite $\sigma = 1$ une infinité de valeurs situées sur le rayon vecteur arbitraire $\theta = \Theta$, $0 < r < \infty$; parmi ces valeurs il y en aura où r sera arbitrairement grand.

En résumant finalement les résultats démontrés dans la présente Note, c'est-à-dire ceux énoncés dans les théorèmes IV et V, nous sommes amenés au théorème suivant:

Soient le nombre réel θ et les nombres positifs ε et E; il existera deux nombres positifs $r < \varepsilon$ et $R > E$ et deux nombres réels correspondants t et T tels que

$$\zeta(1+it) = re^{i\theta}, \ \zeta(1+iT) = Re^{i\theta}.$$